

УДК 539.3

О. И. Власов, А. С. Каиров, д-р техн. наук, В. А. Каиров, канд. техн. наук

*Национальный университет кораблестроения им. адмирала Макарова,*

## НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ КОНСТРУКТИВНО НЕОДНОРОДНЫХ МНОГОСЛОЙНЫХ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ

Рассмотрена задача исследования вынужденных колебаний многослойных ортотропных цилиндрических оболочек с присоединёнными твёрдыми телами. Разработана уточнённая математическая модель напряженно-деформированного состояния оболочечной системы, учитывающая структурную неоднородность композита. Приведены результаты расчета амплитуд вынужденных колебаний оболочки и напряжений, вызванных воздействием нормальной равномерно распределенной возбуждающей силы, изменяющейся по гармоническому закону.

Ключевые слова: многослойная оболочка, вынужденные колебания, присоединённые твёрдые тела, возбуждающая сила, амплитудно-частотные характеристики, напряженно-деформированное состояние.

**Введение.** Широкое применение многослойных оболочечных конструкций из композиционных материалов в различных отраслях современной техники обусловлено их высокой прочностью и возможностью обеспечить заданные механические характеристики. В связи с этим в настоящее время особую актуальность приобретает исследование деформирования и прочности оболочек, при расчёте которых необходимо учитывать влияние их структурной неоднородности и анизотропии при действии гармонически изменяющейся во времени нагрузки.

Учёт влияния внутренней структурной неоднородности, подкрепляющих рёбер и присоединённых твёрдых тел на напряженно-деформированное состояние и амплитудно-частотные характеристики вынужденных колебаний оболочечных элементов представляет собой важную задачу механики, которая требует решения и построения уточнённых математических моделей.

Обзор исследований, посвященных напряженно-деформированному состоянию многослойных оболочек из композиционных материалов при динамическом нагружении, и полученные результаты решения конкретных задач приведены в [4 – 6; 8; 9; 11; 12].

Из анализа публикаций следует, что указанная проблема и связанные с ней задачи еще не получили окончательного решения. Практически отсутствуют работы, посвященные исследованию колебаний и напряженно-деформированному состоянию многослойных ортотропных конструктивно неоднородных оболочечных систем с подкрепляющими рёбрами и присоединёнными твёрдыми телами. Поэтому решение данных задач имеет большое практическое значение и актуальность.

Целью работы является разработка алгоритмов решения краевых задач теории многослойных армированных оболочек и исследование влияния дискретной структуры материала и присоединённых твёрдых тел на их напряженно-деформированное состояние при вынужденных гармонических колебаниях.

**Постановка задачі.** Рассматриваются вынужденные гармонические колебания многослойной ортотропной оболочки вращения, подверженной действию нормальной к поверхности динамической равномерно распределённой нагрузки. Оболочка подкреплена продольными и поперечными рёбрами жесткости и несёт на своей поверхности присоединённые в точках  $\Theta_v(\alpha_1^{(v)}, \alpha_2^{(v)})$  твёрдые тела, массы которых  $M_v$  ( $v = \overline{1, Q}$ ). Поверхность оболочки отнесена к криволинейной ортогональной системе координат  $(\alpha_1, \alpha_2, \eta)$ . Задача рассматривается в линейной постановке на основе гипотез Кирхгофа – Лява.

С учётом принятых допущений компоненты вектора перемещений в слое, отстоящем на расстоянии  $\eta$  от срединной поверхности, выражаются уравнениями:

$$\begin{aligned} u_1^{(\eta)}(\alpha_1, \alpha_2, \eta) &= u_1(\alpha_1, \alpha_2) + \eta \theta_1(\alpha_1, \alpha_2); \\ u_2^{(\eta)}(\alpha_1, \alpha_2, \eta) &= u_2(\alpha_1, \alpha_2) + \eta \theta_2(\alpha_1, \alpha_2); \\ u_3^{(\eta)}(\alpha_1, \alpha_2, \eta) &= u_3(\alpha_1, \alpha_2). \end{aligned} \quad (1)$$

Перемещения центров тяжести поперечных сечений стрингеров и шпангоутов выразим через компоненты вектора перемещений срединной поверхности оболочки:

$$\begin{aligned} u_{1i}(\alpha_1) &= u_1(\alpha_1, \alpha_{2i}) \pm \eta_{1i} \theta_{1i}(\alpha_1, \alpha_{2i}); \\ u_{2i}(\alpha_1) &= u_2(\alpha_1, \alpha_{2i}) \pm \eta_{1i} \theta_{2i}(\alpha_1, \alpha_{2i}); \\ u_{3i}(\alpha_1) &= u_3(\alpha_1, \alpha_{2i}); \\ \theta_{1i}(\alpha_1) &= \theta_1(\alpha_1, \alpha_{2i}); \quad \theta_{kp1i} = \theta_2(\alpha_1, \alpha_{2i}); \\ u_{1j}(\alpha_2) &= u_1(\alpha_{1j}, \alpha_2) \pm \eta_{2j} \theta_{1j}(\alpha_{1j}, \alpha_2); \\ u_{2j}(\alpha_2) &= u_2(\alpha_{1j}, \alpha_2) \pm \eta_{2j} \theta_{2j}(\alpha_{1j}, \alpha_2); \\ u_{3j}(\alpha_2) &= u_3(\alpha_{1j}, \alpha_2); \\ \theta_{2j}(\alpha_2) &= \theta_2(\alpha_{1j}, \alpha_2); \quad \theta_{kp2j} = \theta_1(\alpha_{1j}, \alpha_2), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\eta_{1i}$ ,  $\eta_{2j}$  – эксцентриситеты  $i$ -го стрингера и  $j$ -го шпангоута;  $\theta_{kp1i}$ ,  $\theta_{kp2j}$ ,  $\theta_{1i}$ ,  $\theta_{2j}$  – углы кручения и поворота рёбер относительно координатных осей;  $\alpha_{2i}$ ,  $\alpha_{1j}$  – координаты линий проекций центров тяжести поперечных сечений рёбер, направленных вдоль осей  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  на координатную поверхность оболочки. Знаки  $\pm$  соответствуют случаям внешнего и внутреннего подкрепления.

Деформированное состояние оболочки и рёбер описывается линейными геометрическими уравнениями связи между относительными деформациями и перемещениями срединной поверхности [1; 7]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{u_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + \frac{u_3}{R_1}; & \varepsilon_2 &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{u_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{u_3}{R_2}; \\ \varepsilon_3 &= \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{u_1}{A_1} \right) + \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{u_2}{A_2} \right); & \varepsilon_4 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \theta_2; \\ \varepsilon_5 &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \theta_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\varepsilon_6 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \left( \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \theta_1 + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \theta_2 \right) + \\
&\quad + \frac{1}{R_1} \left( \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_2 \right) + \frac{1}{R_2} \left( \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_1 \right); \\
\theta_1 &= -\frac{1}{A_1} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} + \frac{u_1}{R_1}; & \theta_2 &= -\frac{1}{A_2} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2} + \frac{u_2}{R_2}; \\
\varepsilon_{1i} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_{1i}}{\partial \alpha_1} + \frac{u_{3i}}{R_1}; & \varepsilon_{4i} &= -\frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_{3i}}{\partial \alpha_1} \right) - \frac{u_{3i}}{R_1^2}; \\
\varepsilon_{6i} &= \frac{1}{A_1} \left( \frac{\partial \theta_{kp1i}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial u_{2i}}{\partial \alpha_1} \right); & \varepsilon_{2j} &= \frac{1}{A_{2j}} \frac{\partial u_{2j}}{\partial \alpha_2} + \frac{u_{3j}}{R_2}; \\
\varepsilon_{5j} &= -\frac{1}{A_{2j}^2} \frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial \alpha_2^2} - \frac{u_{3j}}{R_2^2}; & \varepsilon_{6j} &= \frac{1}{A_{2j}} \left( \frac{\partial \theta_{kp2j}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial u_{1j}}{\partial \alpha_2} \right),
\end{aligned} \tag{3}$$

где  $A_1, A_2, R_1, R_2$  – коэффициенты первой квадратичной формы и главные радиусы кривизны срединной поверхности оболочки;  $u_k, \varepsilon_p$  – компоненты перемещений и деформаций точек координатной поверхности ( $p = \overline{1,6}; k = \overline{1,3}$ );  $\theta_1(\alpha_1, \alpha_2), \theta_2(\alpha_1, \alpha_2)$  – углы поворота нормали к срединной поверхности относительно тангенциальных координатных осей.

Учитывая линейный закон распределения перемещений по толщине, который выражен зависимостями (1), соответствующие компоненты деформации  $\varepsilon_1^{(n)}, \varepsilon_2^{(n)}, \varepsilon_3^{(n)}$  можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1^{(n)} &= \varepsilon_1(\alpha_1, \alpha_2) + \eta \varepsilon_4(\alpha_1, \alpha_2); \\
\varepsilon_2^{(n)} &= \varepsilon_2(\alpha_1, \alpha_2) + \eta \varepsilon_5(\alpha_1, \alpha_2); \\
\varepsilon_3^{(n)} &= \varepsilon_3(\alpha_1, \alpha_2) + \eta \varepsilon_6(\alpha_1, \alpha_2).
\end{aligned} \tag{4}$$

Компоненты тензора напряжений в плоскости  $\zeta$ -го слоя определяются с учётом уравнений (1) – (4), согласно обобщённому закону Гука:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^{(\zeta)} &= B_{11}^{(\zeta)} \varepsilon_1 + B_{12}^{(\zeta)} \varepsilon_2 + \eta_\zeta \left( B_{11}^{(\zeta)} \varepsilon_4 + B_{12}^{(\zeta)} \varepsilon_5 \right); \\
\sigma_{22}^{(\zeta)} &= B_{12}^{(\zeta)} \varepsilon_1 + B_{22}^{(\zeta)} \varepsilon_2 + \eta_\zeta \left( B_{12}^{(\zeta)} \varepsilon_4 + B_{22}^{(\zeta)} \varepsilon_5 \right); \\
\sigma_{12}^{(\zeta)} &= B_{66}^{(\zeta)} \varepsilon_3 + \eta_\zeta B_{66}^{(\zeta)} \varepsilon_6.
\end{aligned} \tag{5}$$

Удельные коэффициенты упругости материала ортотропных слоёв оболочки, входящие в уравнение (5), представим в виде:

$$\begin{aligned}
B_{11}^{(\zeta)} &= \frac{E_1^{(\zeta)}}{1 - \nu_1^{(\zeta)} \nu_2^{(\zeta)}}; & B_{12}^{(\zeta)} &= \frac{\nu_2^{(\zeta)} E_1^{(\zeta)}}{1 - \nu_1^{(\zeta)} \nu_2^{(\zeta)}} = \frac{\nu_1^{(\zeta)} E_2^{(\zeta)}}{1 - \nu_1^{(\zeta)} \nu_2^{(\zeta)}}; \\
B_{22}^{(\zeta)} &= \frac{E_2^{(\zeta)}}{1 - \nu_1^{(\zeta)} \nu_2^{(\zeta)}}; & B_{66}^{(\zeta)} &= G_{12}^{(\zeta)},
\end{aligned} \tag{6}$$

где  $E_1^{(\zeta)}$ ,  $E_2^{(\zeta)}$ ,  $\nu_1^{(\zeta)}$ ,  $\nu_2^{(\zeta)}$ ,  $G_{12}^{(\zeta)}$ ,  $\rho^{(\zeta)}$  – модули упругости на растяжение и сдвиг, коэффициенты Пуассона и плотность материала  $\zeta$ -го слоя, для которых выполняются соотношения  $E_1^{(\zeta)} \nu_2^{(\zeta)} = E_2^{(\zeta)} \nu_1^{(\zeta)}$ .

При совмещении координатной поверхности с внутренней поверхностью оболочки обобщённые коэффициенты упругости с учетом (6) определяются зависимостями [1]:

$$\begin{aligned} C_{pq} &= \sum_{i=1}^N B_{pq}^{(\zeta)} (\eta_{\zeta} - \eta_{\zeta-1}); \\ K_{pq} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N B_{pq}^{(\zeta)} (\eta_{\zeta}^2 - \eta_{\zeta-1}^2); \\ D_{pq} &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^N B_{pq}^{(\zeta)} (\eta_{\zeta}^3 - \eta_{\zeta-1}^3), \quad (p, q = 1, 2, 6). \end{aligned} \quad (7)$$

При этом для оболочки симметричного строения  $K_{pq} = 0$ .

Соотношения упругости в форме (7) записываются также и для оболочек, у которых главные направления упругости повернуты вокруг оси  $\eta$  на угол  $\psi$  и не совпадают с направлениями координатных линий  $(\alpha_1, \alpha_2)$ . В этом случае характеристики ортотропного материала  $\zeta$ -го слоя записываются в виде [1, 10]:

$$\begin{aligned} B_{11}^{(\zeta)} &= \bar{B}_{11}^{(\zeta)} \cos^4 \psi + 2(\bar{B}_{12}^{(\zeta)} + 2\bar{B}_{66}^{(\zeta)}) \sin^2 \psi \cos^2 \psi + \bar{B}_{22}^{(\zeta)} \sin^4 \psi, \\ B_{12}^{(\zeta)} &= \bar{B}_{12}^{(\zeta)} + [\bar{B}_{11}^{(\zeta)} + \bar{B}_{22}^{(\zeta)} - 2(\bar{B}_{12}^{(\zeta)} + 2\bar{B}_{66}^{(\zeta)})] \sin^2 \psi \cos^2 \psi, \\ B_{22}^{(\zeta)} &= \bar{B}_{11}^{(\zeta)} \sin^4 \psi + 2(\bar{B}_{12}^{(\zeta)} + 2\bar{B}_{66}^{(\zeta)}) \sin^2 \psi \cos^2 \psi + \bar{B}_{22}^{(\zeta)} \cos^4 \psi, \\ B_{66}^{(\zeta)} &= \bar{B}_{66}^{(\zeta)} + [\bar{B}_{11}^{(\zeta)} + \bar{B}_{22}^{(\zeta)} - 2(\bar{B}_{12}^{(\zeta)} + 2\bar{B}_{66}^{(\zeta)})] \sin^2 \psi \cos^2 \psi. \end{aligned}$$

Уравнения колебаний рассматриваемой оболочечной системы получим на основе вариационного принципа Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = F, \quad (8)$$

где  $\mathcal{L} = K - \Pi$  – функция Лагранжа;  $\Pi$ ,  $K$  – потенциальная и кинетическая энергии деформации и колебаний оболочечной системы;  $u$  – вектор обобщённых перемещений поверхности;  $F$  – возмущающая внешняя нагрузка.

Потенциальная и кинетическая энергии оболочечной системы определяются как сумма потенциальных энергий упругих деформаций и кинетических энергий её составляющих:

$$K = K^{(0)} + \sum_{i=1}^I K_i^{(1)} + \sum_{j=1}^J K_j^{(2)} + \sum_{\nu=1}^Q K_{\nu}^{(3)}, \quad \Pi = \Pi^{(0)} + \sum_{i=1}^I \Pi_i^{(1)} + \sum_{j=1}^J \Pi_j^{(2)},$$

где  $K^{(0)}$ ,  $K_i^{(1)}$ ,  $K_j^{(2)}$ ,  $K_{\nu}^{(3)}$ ,  $\Pi^{(0)}$ ,  $\Pi_i^{(1)}$ ,  $\Pi_j^{(2)}$  – кинетическая и потенциальная энергии оболочки,  $i$ -го и  $j$ -го подкрепляющих рёбер и присоединённых тел.

Потенциальная энергия упругой деформации оболочки имеет вид [1]:

$$\begin{aligned} \Pi^{(0)} = & \frac{1}{2} \int_{\alpha' 0}^{\alpha'' 2\pi} \left\{ C_{11} \varepsilon_1^2 + 2 C_{12} \varepsilon_1 \varepsilon_2 + C_{22} \varepsilon_2^2 + C_{66} \varepsilon_3^2 + \right. \\ & + 2 [K_{11} \varepsilon_1 \varepsilon_4 + K_{12} (\varepsilon_1 \varepsilon_5 + \varepsilon_2 \varepsilon_4) + K_{22} \varepsilon_2 \varepsilon_5 + K_{66} \varepsilon_3 \varepsilon_6] + \\ & \left. + D_{11} \varepsilon_4^2 + 2 D_{12} \varepsilon_4 \varepsilon_5 + D_{22} \varepsilon_5^2 + D_{66} \varepsilon_6^2 \right\} A_1 A_2 \partial \alpha_1 \partial \alpha_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Выражения для потенциальной энергии упругой деформации  $i$ -го продольного и  $j$ -го поперечного рёбер таковы [7]:

$$\begin{aligned} \Pi^{(1)} = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I \int_{\alpha' 0}^{\alpha''} \left[ E_{1i} (S_{1i} \varepsilon_{1i}^2 + I_{1i} \varepsilon_{4i}^2) + G_{1i} I_{\square p 1i} \varepsilon_{6i}^2 \right] A_1 d\alpha_1; \\ \Pi^{(2)} = & \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J \int_0^{2\pi} \left[ E_{2j} (S_{2j} \varepsilon_{2j}^2 + I_{2j} \varepsilon_{5j}^2) + G_{2j} I_{\square p 2j} \varepsilon_{6j}^2 \right] A_2 d\alpha_2. \end{aligned} \quad (10)$$

Кинетические энергии оболочки и рёбер записываются в виде:

$$\begin{aligned} K^{(0)} = & \frac{1}{2} \sum_{\zeta=1}^N \rho^{(\zeta)} h_{\zeta} \int_{\alpha' 0}^{\alpha'' 2\pi} \sum_{k=1}^3 \left( \frac{\partial u_k^{(\zeta)}}{\partial t} \right)^2 A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2; \\ K^{(1)} = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I \left\{ \rho_{1i} S_{1i} \int_{\alpha' 0}^{\alpha''} \left[ \sum_{k=1}^3 \left( \frac{\partial u_{ki}}{\partial t} \right)^2 + \frac{I_{kp 1i}}{S_{1i}} \left( \frac{\partial \theta_{kp 1i}}{\partial t} \right)^2 \right] \right\} A_1 d\alpha_1; \\ K^{(2)} = & \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J \left\{ \rho_{2j} S_{2j} \int_0^{2\pi} \left[ \sum_{k=1}^3 \left( \frac{\partial u_{kj}}{\partial t} \right)^2 + \frac{I_{kp 2j}}{S_{2j}} \left( \frac{\partial \theta_{kp 2j}}{\partial t} \right)^2 \right] \right\} A_2 d\alpha_2; \\ K^{(3)} = & \frac{1}{2} \sum_{v=1}^Q M_v \sum_{k=1}^3 \left( \frac{\partial u_{kv}}{\partial t} \right)^2. \end{aligned} \quad (11)$$

В соотношениях (9) – (11) приняты следующие обозначения:  $C_{pq}$ ,  $K_{pq}$ ,  $D_{pq}$  – обобщенные коэффициенты упругости;  $u_k^{(\zeta)}$ ,  $u_{kv}$  – компоненты перемещений срединных поверхностей составляющих слоёв и центров масс присоединённых тел ( $k = \overline{1, 3}$ );  $h_{\zeta}$  – толщина  $\zeta$ -го слоя оболочки;  $E_{1i}$ ,  $G_{1i}$ ,  $\rho_{1i}$  – модуль упругости, модуль сдвига и плотность материала стрингеров;  $E_{2j}$ ,  $G_{2j}$ ,  $\rho_{2j}$  – аналогичные физико-механические характеристики шпангоутов;  $S_{1i}$ ,  $I_{1i}$ ,  $I_{kp 1i}$ ,  $\theta_{kp 1i}$  – площади поперечных сечений стрингеров, их моменты инерции относительно окружной координаты, моменты инерции при кручении, угол закручивания;  $S_{2j}$ ,  $I_{2j}$ ,  $I_{kp 2j}$ ,  $\theta_{kp 2j}$  – аналогичные характеристики шпангоутов;  $\alpha'$ ,  $\alpha''$  – координаты торцов оболочки;  $M_v$  – массы присоединённых тел.

**Метод решения.** Для решения задачи о напряженно-деформированном состоянии используется метод разложения решения по формам собственных колебаний [13]. Компоненты вектора перемещений представляются в виде:

$$u_k = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \tilde{u}_{mn}^{(k)}(t) \phi_{mn}^{(k)}(\alpha_1, \alpha_2) \quad (k = \overline{1, 3}), \quad (12)$$

где  $\tilde{u}_{mn}^{(k)}(t) = q_{mnj}^{(k)} \cos(\omega_j t)$  – функции времени  $t$ , составляющие вектор-столбец  $\tilde{u}$  ( $k = \overline{1, 3}$ );  $q_{mnj}^{(k)}$  – неизвестные числовые коэффициенты, образующие собственный вектор  $\{\tilde{q}\}_j$ , представляющий форму колебаний на  $j$ -ой собственной частоте;  $\omega_j$  –  $j$ -ая круговая частота собственных колебаний;  $t$  – время;  $\phi_{mn}^{(k)}(\alpha_1, \alpha_2)$  – аппроксимирующие функции аргументов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , удовлетворяющие заданным краевым условиям на контуре оболочки и условиям периодичности в окружном направлении;  $M, N$  – количество членов разложения по координатам. Параметры  $m$  и  $n$  представляют собой некоторую последовательность целых чисел ( $m = \overline{1, M}$ ;  $n = \overline{1, N}$ ).

Подставив (12) в (8) с учётом энергии диссипации и выполнив процедуру метода Ритца, получим систему уравнений гармонических колебаний многослойной ортотропной оболочки в перемещениях в связанной с ней системе координат:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F\}, \quad (13)$$

здесь  $\{u\}$  – вектор-столбец обобщенных перемещений оболочечной системы, элементами которого являются искомые функции  $\tilde{u}_{mn}^{(k)}(t)$ ;  $\{\ddot{u}\}$ ,  $\{\dot{u}\}$  – векторы ускорений и скоростей оболочки;  $[K], [C], [M]$  – матрицы жесткости, демпфирования и инерционная оболочки;  $\{F\}$  – вектор внешней поверхностной нагрузки. В задаче гармонического анализа используются те же матрицы жесткости  $[K]$  и инерционная  $[M]$ , что и в модальном анализе [2].

Матрица демпфирования  $[C]$  учитывает диссипацию энергии, связанную с внутренним трением материала, характером соединений элементов конструкции между собой, амплитудно-частотными характеристиками, скоростью демпфирования  $\{\dot{u}\}$  и аппроксимируется как линейная комбинация матриц  $[M]$  и  $[K]$  [3]. Коэффициенты демпфирования определяются для всей оболочечной системы, исходя из ее диссипативных свойств и демпфирующей способности [14].

Гармонический анализ установившихся вынужденных гармонических колебаний исследуемой оболочечной конструкции выполняется методом суперпозиции мод [3], который использует собственные частоты и формы колебаний, полученные при решении задачи о собственных колебаниях.

Для решения системы (13) переходим к модальным координатам  $y_j$ , используя зависимость

$$\{u\} = \sum_{j=1}^{\Theta} \{\tilde{q}_0\}_j y_j, \quad (14)$$

где  $\{\tilde{q}_0\}_j$  – форма колебаний  $j$ -ой моды;  $\Theta$  – число удерживаемых в решении мод собственных колебаний.

Подставив выражение (14) в уравнение (13) и выполнив ортогонализацию и некоторые преобразования, получим для модальных координат систему  $\Theta$  независимых дифференциальных уравнений вида:

$$\ddot{y}_j + 2\omega_j \xi_j \dot{y}_j + \omega_j^2 y_j = f_j, \quad (15)$$

где  $\xi_j$  – соответствующий коэффициент демпфирования для  $j$ -ой моды;  $\omega_j$  – собственная круговая частота для  $j$ -ой моды;  $f_j$  – нагрузка, соответствующая модальной координате.

Для установившихся гармонических колебаний комплексные амплитуды действующей нагрузки  $f_j$  и модальной координаты  $y_j$  имеют вид:

$$f_j = f_{0j} e^{i\Omega t}, \quad y_j = y_{0j} e^{i\Omega t}, \quad (16)$$

где  $f_{0j}$ ,  $y_{0j}$  – комплексные амплитуды силы и модальной координаты  $j$ -ой формы собственных колебаний;  $i$  – мнимая единица;  $\Omega$  – круговая частота внешней силы.

Тогда с учетом (16) уравнение (15) преобразуется к виду

$$(-\Omega^2 + i2\Omega\omega_j\xi_j + \omega_j^2)y_{0j} = f_{0j}, \quad (17)$$

откуда определяется амплитуда  $y_{0j}$ .

Решив уравнение (17) в модальных координатах, осуществляем переход к исходной системе координат. Вклад  $j$ -ой моды в решение составляет  $\{C_j\} = \{\tilde{q}_0\}_j y_{0j}$  (комплексный вектор перемещений), где  $\{\tilde{q}_0\}_j$  –  $j$ -я собственная форма, полученная при модальном анализе, когда  $[M]\{\ddot{\tilde{u}}\} + [K]\{\tilde{u}\} = 0$ . То есть отдельные модальные отклики  $y_j$  накладываются друг на друга, чтобы получить фактический отклик. Окончательно суммируя вклады каждой из мод, определяются комплексные перемещения

$$\{\tilde{u}\} = \sum_{j=1}^{\Theta} \{C_j\}.$$

После вычисления значений амплитуд вынужденных колебаний по известным соотношениям теории оболочек определяются деформации и напряжения исследуемой оболочечной системы с учетом ее конструктивных неоднородностей.

**Результаты численного моделирования.** Ниже рассмотрена задача определения напряженно-деформированного состояния трёхслойной цилиндрической жестко закреплённой оболочки с присоединённым твёрдым телом при динамическом нагружении  $F_0 = 6 \times 10^4$  Па. Относительные геометрические характеристики рассматриваемой оболочки составляют:  $L/R = 2,5$ ,  $R/h = 110$  ( $h = 0,9$  мм), где  $R$ ,  $L$ ,  $h$  – радиус, длина и толщина оболочки. Снаружи оболочка подкреплена двумя шпангоутами прямоугольного профиля  $10 \times 1$  мм в поперечном сечении и 12 стрингерами  $6 \times 1$  мм соответственно. Толщины составляющих слоёв одинаковы. Механические характеристики наружных слоёв и ребёр одинаковы:  $E_1 = 142$  ГПа;

$E_2 = 9,13 \text{ ГПа}$ ;  $G_{12} = 5,49 \text{ ГПа}$ ;  $\nu_1 = 0,32$ ;  $\nu_2 = 0,02$ ;  $\rho = 1,55 \times 10^3 \text{ кг/м}^3$ , а внутреннего слоя составляют:  $E_1 = 37,8 \text{ ГПа}$ ;  $E_2 = 10,1 \text{ ГПа}$ ;  $G_{12} = 4,9 \text{ ГПа}$ ;  $\nu_1 = 0,29$ ;  $\nu_2 = 0,08$ ;  $\rho = 1,8 \times 10^3 \text{ кг/м}^3$  соответственно. Жестко присоединённое твёрдое тело ( $M_i / M_o = 0,1$ ) расположено на наружной поверхности в точке с координатами  $\alpha_1 = L/2$  и  $\alpha_2 = 0$ .

На рис. 1 приведены результаты расчёта зависимости максимальных нормальных перемещений  $u_3$  вынужденных колебаний оболочки от относительного частотного параметра  $\bar{\Omega} = \Omega_i / \omega_o$  с учётом внутреннего демпфирования ( $\xi = 0,05$ ), где  $\Omega_i$  – частота вынужденных колебаний;  $\omega_o$  – собственная частота колебаний.

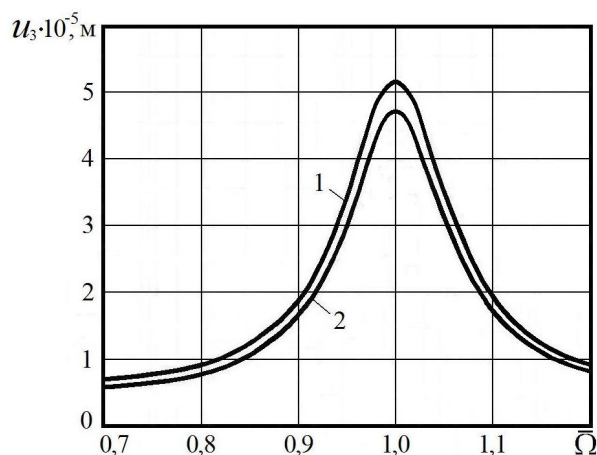


Рис. 1. – Амплитуды вынужденных колебаний с демпфированием для оболочки, подкрепленной стрингерами

Колебания рассматриваются на резонансной частоте  $\Omega_1 = 6,849 \times 10^3 \text{ с}^{-1}$ . Кривая 1 представляет решение на основе разработанной методики, кривая 2 – результаты, полученные с использованием пакета ANSYS. Из графика видно, что максимальный пик амплитуды находится на резонансной частоте, после чего её величина быстро убывает. Приведенные на рис. 1 данные подтверждают адекватность разработанной математической модели и эффективность разработанной расчетной методики.

Зависимость влияния относительной величины массы присоединённого тела  $M_i$  к массе оболочки  $M_o$  с учётом коэффициентов демпфирования  $\xi$  материала на динамические напряжения для рассматриваемой оболочки представлено на рис. 1. Здесь  $\sigma_i$  – максимальные динамические напряжения, возникающие в конструкции с присоединённым телом при динамическом нагружении;  $\sigma_o$  – максимальные динамические напряжения в оболочке без присоединённого тела. Кривая 1 представляет зависимость при  $\xi = 0,01$ , кривая 2 – зависимость при  $\xi = 0,05$ . Из приведенных результатов видно, что присоединённое твердое тело оказывает существенное влияние на напряженно-деформированное состояние тонкостенной оболочки. С возрастанием массы присоединённого тела динамические напряжения возрастают.



Результаты проведенного гармонического анализа показали, что присоединённые тела и области жесткой заделки торцов оболочки являются наибольшими концентраторами напряжений для конструктивно неоднородной оболочки.

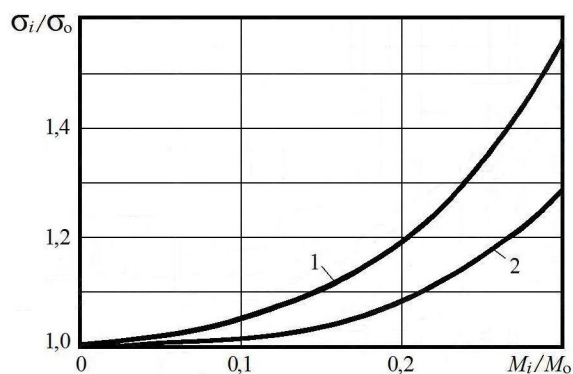


Рис. 2. – Зависимости максимальных динамических напряжений в оболочке от величины массы присоединённого тела и коэффициента затухания  $\xi$

Одним из эффективных способов улучшения амплитудно-частотных характеристик и снижения напряжений, наряду с повышением жесткости конструкции, является конструктивное и внутреннее демпфирование оболочечной системы за счёт различных демпферов. Демпфирование снижает амплитуды вынужденных колебаний и динамические напряжения. Варьируя жесткостью осциллятора от нулевого уровня до абсолютно жесткой связи можно моделировать все возможные варианты конструкционного гистерезиса.

**Выводы.** С использованием метода суперпозиции мод решена задача расчёта динамических напряжений многослойных композитных цилиндрических оболочек вращения с присоединёнными твёрдыми телами при гармонических колебаниях. Расчётная модель напряженно-деформированного состояния оболочечной системы построена на основе линейной теории тонких упругих оболочек с учётом дискретно неоднородной по толщине структуры составляющих слоёв.

Полученные численные результаты показывают, что ориентация армирующих волокон в ортотропных слоях материала и присоединённые твёрдые тела оказывают существенное влияние на величину динамических напряжений и амплитуд вынужденных колебаний оболочки. Достоверность полученных данных подтверждается сравнением результатов расчётов исследуемой оболочки с данными, полученными с использованием пакета программ ANSYS.

### Бibliографические ссылки

1. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек / С. А. Амбарцумян. – М.: Наука, 1974. – 446 с.
2. Власов О. И. Численное исследование частот и форм собственных колебаний оболочек вращения с присоединёнными твёрдыми телами / О. И. Власов, А. С. Каиров // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – Д.: Ліра. – 2015. – Вип. 24. – С. 26–34.
3. Бате К. Численные методы анализа и метод конечных элементов: Пер. с англ. / К. Бате, Е. Вилсон. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.

4. **Болотин В. В.** Механика многослойных конструкций / В. В. Болотин, Ю. Н. Новичков. – М.: Машиностроение, 1980. – 376 с.
5. **Григолюк Э. И.** Многослойные армированные оболочки: Расчёт пневматических шин / Э. И. Григолюк, Г. М. Куликов. – М.: Машиностроение, 1988. – 288 с.
6. **Заруцкий В. А.** Стационарные волны в многослойных ортотропных ребристых цилиндрических оболочках / В. А. Заруцкий // В кн.: Механика композитов: [в 12 т.]. Т.9: Динамика элементов конструкций. – К.: А.С.К. – 1999. – С. 44–82.
7. Колебания ребристых оболочек вращения / И. Я. Амиро, В. А. Заруцкий, В. Н. Ревуцкий. – К.: Наукова думка, 1988. – 172 с.
8. Композиционные материалы: Справочник / В. В. Васильев, В. Д. Протасов, В. В. Болотин и др.; Под общ. ред. В. В. Васильева, Ю. М. Тарнопольского. – М.: Машиностроение, 1990. – 512 с.
9. **Кубенко В. Д.** Экспериментальные исследования колебаний и динамической устойчивости оболочек из слоистых композитных материалов / В. Д. Кубенко, П. С. Ковальчук // Прикл. механика. – 2009. – Т. 45. – № 5. – С. 53–79.
10. **Лехницкий С. Г.** Теория упругости анизотропного тела / С. Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
11. Механика композитных материалов и элементов конструкций: [в 3 т.] / А. Н. Гузь, Я. М. Григоренко, И. Ю. Бабич и др. – К.: Наукова думка, 1983. – Т.2: Механика элементов конструкций. – 464 с.
12. Механика композитов: [в 12 т.] / Под ред. В. Д. Кубенко. Т.9. Динамика элементов конструкций. – К.: АСК., 1999. – 379 с.
13. **Тимошенко С. П.** Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко, Д. Х. Янг, У. Гувер. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
14. **Трощенко В. Т.** Прочность материалов и конструкций / В. Т. Трощенко, Р. И. Куриат, А. А. Лебедев и др. – К.: Академперіодика, 2005. – 1086 с.

Надійшла до редколегії 25.04.2017

УДК 539.3

## НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНІЙ СТАН КОНСТРУКТИВНО НЕОДНОРІДНИХ БАГАТОШАРОВИХ ОРТОТРОПНИХ ОБОЛОНОК ПРИ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАННЯХ

**О. І. Власов, О. С. Каіров**, д-р техн. наук,  
**В. О. Каіров**, канд. техн. наук

*Національний університет кораблебудування ім. адмірала Макарова,  
Миколаїв, Україна*

Розглянуто задача дослідження вимушених коливань багатошарових ортотропних циліндричних оболонок з приєднаними твердими тілами. Розроблена уточнена математична модель напружено-деформованого стану оболонкової системи, яка враховує структурну неоднорідність композиту. Наведено результати розрахунку амплітуд вимушених коливань оболонки і напружень, викликаних впливом нормальної рівномірно розподіленої збуджуючої сили, що змінюється за гармонійним законом

**Ключові слова:** багатошарова оболонка, вимушені коливання, приєднані тверді тіла, збуджуюча сила, амплітудно-частотні характеристики, напружено-деформований стан.

UDC 539.3

# THE STRESS-STAINED STATE OF THE CONSTRUCTIONAL NON-HOMOGENEOUS MULTILAYER ORTHOTROPIC SHELLS UNDER FORCED OSCILLATIONS

**O. I. Vlasov, O. S. Kairov**, Dr. Sci. (Tech.), V. O. Kairov, PhD (Tech.)

*National University of Shipbuilding named after Admiral Makarov,*

*Mykolaiv, Ukraine*

**Forced vibrations of elastic multilayer orthotropic cylindrical shells with attached solid bodies have been investigated. The more correct mathematical model of shells stress-strained state, that takes their constructional non-homogeneity into consideration has also been developed. The forced oscillation amplitudes and the stresses of shells, caused by the normal force, distributed by the harmonic law are also given.**

**Keywords:** multilayer shell, forced vibration, attached solid bodies, exciting force, oscillations amplitudes and frequencies, stress-strained state.

The main place among the problems of multilayer composite shells development is given to the problems of their forced vibration frequencies solution. The presence of attached solid bodies and their discrete location cause an essential influence on the shells dynamic characteristics. The accounting of these factors forms a need for the farther investigations of forced vibrations of the constructional non-homogeneous shell systems.

The main aim of this work is to investigate the thin elastic multilayer orthotropic shells with solid attached bodies stress-strained state, caused by the influence of harmonic dynamic force.

The influence of the shells material orthotropic on their oscillations amplitudes, frequencies and stress-strained state has been investigated by means of the new developed calculation methodology. The shells forced vibration frequencies and stress-strained state have been calculated on the base of Lagrange variation principle. The shells stress-strained state has been calculated on the base of Kirchhoff-Love's linear hypothesis. The main problem of the research is solved by the superposition principle. For the objects of superposition the shells forced vibration forms have been taken. The obtained frequencies have also been compared with the results of calculation, based on ANSYS program and show good convergence. Thus the developed mathematical model is rather adequate.

The numerical results achieved on the base of the developed mathematical model show that the location of attached solid bodies sharply influence the thin shells forced oscillation amplitudes, frequencies and stress-strained state. The new dependences and mechanical effects, caused by the shells constructional non-homogeneity are rather important and should be used in practice.

## References

1. **Ambarcumyan S. A.** General theory of anisotropic shells / S. A. Ambarcumyan. – Moscow: Nauka, 1974. – 446 p. (in Russian).
2. **Vlasov O. I.** Numerical study of free vibrations of the reinforced cylindrical shells with attached bodies / O. I. Vlasov, A. S. Kairov // Problems of computational mechanics and strength of structures. – Dnipropetrovsk: Lira. – 2015. – Vol. 24. – P. 26–34. (in Russian).

3. **Bate K.** Numerical methods of analysis and finite element method / K. Bate, E. Vilson. – Moscow: Stroyizdat, 1982. – 448 p. (in Russian).
4. **Bolotin V. V.** Mechanics of multilayered structures / V. V. Bolotin, Yu. N. Novichkov. – Moscow: Mashinostroenie, 1980. – 376 p. (in Russian).
5. **Grigolyuk E. I.** Multilayer reinforced shell: Calculation of pneumatic tires / E. I. Grigolyuk, G. M. Kulikov. – Moscow: Mashinostroenie, 1988. – 288 p. (in Russian).
6. **Zarutskiy V. A.** Stationary waves in layered orthotropic ribbed cylindrical shells / V. A. Zarutskiy // Mechanics of composites. – Vol. 9: Dynamics of structural elements. – Kyiv: A.C.K., 1999. – P. 44–82. (in Russian).
7. Vibrations of ribbed shells of revolution / I. Ya. Amiro, V. A. Zarutskiy, V. N. Revutskiy. – Kyiv: Naukova Dumka, 1988. – 172 p. (in Russian).
8. Composite materials: Handbook / V. V. Vasilyev, V. D. Protasov, V. V. Bolotin. Ed. by Vasilyev, Yu. M. Tarnopolskiy, – Moscow: Mashinostroenie, 1990. – 512 p. (in Russian).
9. **Kubenko V. D.** Experimental study of vibrations and dynamic stability of shells made of laminated composite materials / V. D. Kubenko, P. S. Kovalchuk // Applied Mechanics. – 2009. – Vol. 45. – No 5. – P. 53–79. (in Russian).
10. **Lehnitskiy S. G.** Theory of elasticity of an anisotropic body / S. G. Lehnitskiy. – Moscow: Nauka, 1977. – 416 p. (in Russian).
11. Mechanics of composite materials and structural elements / A. N. Guz, Ya. M. Grigorenko, I. Yu. Babich. – Vol. 2: Mechanics of structural elements. – Kyiv: Naukova Dumka, 1983. – 464 p. (in Russian).
12. Mechanics of composites / Ed. by V. D. Kubenko. – Vol. 9: Dynamics of structural elements. – Kyiv: A.C.K., 1999. – 379 p. (in Russian).
13. **Timoshenko S. P.** Vibration problems in engineering / S. P. Timoshenko, D. H. Young, U. Guver. – Moscow: Mashinostroenie, 1985. – 472 p. (in Russian).
14. **Troschenko V. T.** Strength of materials and structures / V. T. Troschenko, R. I. Kuriat, A. A. Lebedev. – Kyiv: Akadempriodika, 2005. – 1086 p. (in Russian).